Обобщающее повторение на уроках и факультативных занятиях

Пирютко О.Н.

"Нет никакой надобности повторять выученное в том порядке, в каком оно было пройдено, а напротив, ещё полезнее повторения случайные, сводящие выученное в новые комбинации" К.Д.Ушинский.

Необходимость повторения изученного ранее материала вызвана структурой программы учебного курса математики. Изучение некоторых вопросов школьного курса математики осуществляется линейно, развитие ее основных идей продолжается на протяжении всего периода обучения в школе. Учащиеся, в своем подавляющем большинстве, не видят эти идеи, являющиеся основой, на которой строятся содержательные линии школьного курса математики. Работа над обобщением и применением ведущих идейшкольного курса математики осуществляется при повторении, при этом необходимым элементом системного подхода к повторению является специальным образом организованная система задач. От того, какова структура, содержание, последовательность, степень обобщенности идеи в решении задачи, зависит эффективность повторения.

Предлагаем систему задач для проведения урока обобщающего повторения и продолжения развития идеи задачи на факультативных занятияхпо теме: «Применение свойств функций при решении уравнений и неравенств».

Первый блок задач.
Подготовительные задачи к решению основной (целевой) задачи.

1. Решите неравенство:$x^2 - 2\sin\frac{\pi}{7}x + 1 < 0$

Решение: $D_1 = \left(\sin\frac{\pi}{7}\right)^2 - 1 < 0$, следовательно, график квадратного трехчлена $y = x^2 - 2\sin\frac{\pi}{7}x + 1$ расположен выше оси абсцисс и данное неравенство решений не имеет.
Ответ: решений нет.
2.Найдите все пары действительных чисел (x; y), удовлетворяющих неравенству:$x^2 - 2\sin\pi y\, x + 1 \leq 0$
Решение: $D_1 = (\sin\pi y)^2 - 1 = -(\cos\pi y)^2 \leq 0$, следовательно, график квадратного трехчлена имеет с осью абсцисс только одну общую точку, а все

остальные точки графика лежат выше этой оси. Таким образом, решением неравенства будут значения переменных, удовлетворяющих условию: $x^2 - 2\sin\pi y\, x + 1 = 0$, т.е.

$$\begin{cases} x = \sin\pi y \\ \cos\pi y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 1 \\ y = 0{,}5 + 2n, n \in Z \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1{,}5 + 2k, k \in Z \end{cases} \right)$$

Ответ:(1; $0{,}5 + 2n, n \in Z$); $(-1; 1{,}5 + 2k, k \in Z)$,

3.Решите неравенство: $(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2} \geq 0$

Решение:Найдем область определения функции, стоящей в левой части неравенства: подкоренное выражение должно быть неотрицательным

x^2-3x+2≥0,решения этого неравенства:(-∞; 1]∪ [2 ;+∞),

Найдем нули функцииу $=(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}$: x=1, x=2(x=1,5 не входит в указанную область определения).

Определяем знаки функции y $=(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}$ на каждом из промежутков (-∞;1] и [2;+∞). В ответе запишем значения x, при которых значения функции y $=(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}$ неотрицательны: [2;+∞) и x =1. Следует обратить внимание на то, что нужно отметить не только промежутки, в которых функция принимает неотрицательные значения, но и все другие значения аргумента, в которых значение функции равнонулю.

Ответ: [2;+∞),{1}.

4.Решите неравенство: $(\sin x - 4)lg^2x \geq 0$

Решение: Так как $\sin x - 4 < 0$, а $lg^2x \geq 0$ то решением неравенства будут только те значения переменной, при которых, $lg^2x = 0$, т.е. x=1.

Ответ: x=1

Подготовительные задачи к основной можно рассмотреть на уроке, а основную задачу, цель решения которой в интеграции различных свойств функций, можно рассмотреть на факультативных занятиях.

Основная (целевая)задача 1.

Найдите все тройкидействительных чисел (x;y;z), удовлетворяющих уравнению:

x^2-2xsinπy-cos2x+2cos^{2}x+$\sqrt{-4xz-x^2-3}$= (1+2xz)$log_2^2(\frac{2y}{z})$

Решение

1) После небольших преобразований, (используем формулы тригонометрии), получаем:

x^2-2xsinπy+1+$\sqrt{-4xz-z^2-3}$=(1+2xz)$log_2^2(\frac{2y}{z})$ (1)

2) По свойствам квадратного трехчлена (см. подготовительную задачу 2), получим:x^2- 2xsinπy + 1≥ 0(2)для любых значений x и y.

3) По свойствам функции $y = \sqrt{x}$ будем иметь: $\sqrt{-4xz-z^2-3} \geq 0$

при условии:-4xz-z^2-3$\geq$0 (3).

4) Таким образом, левая часть данного уравнения принимает только неотрицательные значения, следовательно, (1+2xz)$log_2^2(\frac{2y}{z})$ (4) - правая часть уравнения так же неотрицательна.

5) Из (3) следует, что -4xz-2 $\geq$0 z^2+1 или 2xz+1$\leq \frac{z^2+1}{-2}$, откуда получаем, что выражение 2xz+1 принимает только отрицательные значения, а выражение (4) принимает только неположительные значения.

Выражение (4) принимает значение, равное нулюпри условии $log_2^2(\frac{2y}{z})$ = 0, $\frac{2y}{x} = 1$; 2y=z.

6) При всех отмеченных условиях получаем, что левая часть уравнения принимает только неотрицательные значения, а правая часть – неположительные. Значитравенствоэтих частей возможно только в случае, когда обе они принимают значения, равные нулю.

7) Из подготовительной задачи 2 следует, что равенство нулю выражения x^2- 2xsinπy + 1 достигается при x= 1 или x = -1.Второе слагаемое $\sqrt{-4xz-z^2-3}$ обращается в ноль соответственно при z=-3; -1 или z =3; 1

8) Объединяя все условия равенства нулю левой и правой частей уравнения,получим: $\left(\begin{cases} x=1 \\ z=-3;\ -1 \\ y=z/2 \\ y=0{,}5+2n, n\in Z \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=-1 \\ z=3;1 \\ y=z/2 \\ y=1{,}5+2k, k\in Z \end{cases}\right)$

y=-1/2 не подходит при условии y=0, 5+2n, n$\in$ Z,

y= 1/2 не подходит при условии y=1, 5+2k, k$\in$ Z,

Таким образом, решением объединения двух систем уравнений будут следующие значения переменных:

x=1; y=-3/2; z=-3 или x=-1; y=3/2; z=3

Ответ: (1; -3/2; -3),(-1; 3/2; 3)

В процессе решения этой задачи повторяются и включаются в новые системы связей и отношений знания о свойствах функций (квадратного трехчлена, квадратного корня, тригонометрических функций, логарифмической функции) и применении этих свойств для решения уравнений и неравенств.

Задание для самостоятельного решения

Подготовительные задачи для решения основной (целевой) задачи.

1.Решите неравенство:$\sqrt{2^{x^2-4}-1}(x^2-7x+6)\le 0$

$\{-2\}\cup[2;6]$.

2.Решите неравенство:$3^x+2^{-x}>1$;

(-∞;+∞).

3. Решите уравнение $\left|\cos\frac{y}{3}\right|+\left|\sin\frac{y}{3}\right|$=1;

($\frac{3}{2}\pi n, n\in Z$).

4. Решите неравенство $\cos^2(x+1)\lg(9-2x-x^2)\ge 1$;

(-1)

5.Найдите сумму целых решений неравенства:$\sqrt{9-x^2}(x^2+6x-7)\ge 0$

(3)

Основная (целевая) задача

Найдите все пары действительных чисел (x; y), удовлетворяющих уравнению:$log_{3^x+2^{-x}}\left(3-\cos 4x+\sin\frac{3y}{2}\right)\le log_{\left(\left|\cos\frac{y}{3}\right|+\left|\sin\frac{y}{3}\right|\right)}(\cos 2y\sin 3x)$

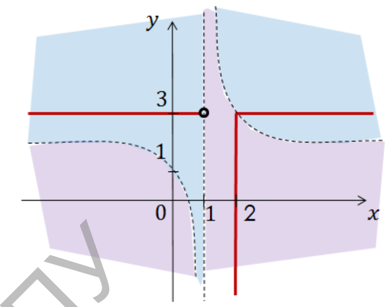
(x=$\frac{\pi}{2}+\pi k$, k$\in Z$, y= $\pi(1+12l), l\in Z$или y=$\pi(5+12l), l\in Z$.)

Второй блок задач
Подготовительные задачи к основной (целевой) задаче 2

Уточнение: $\max$ и $\min$ в предложенных заданиях означает наибольшее и наименьшее значение выражения.

1. Решить уравнения:

а) $\max\left\{y-2;\frac{1}{x-1}\right\}=1$



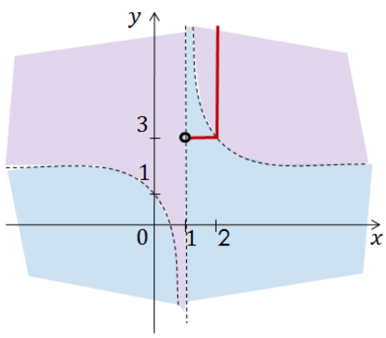
① $\begin{cases} y-2\geq\frac{1}{x-1};\\ y-2=1\end{cases}\begin{cases} y\geq\frac{1}{x-1}+2\\ y=3\end{cases}.$

② $\begin{cases} y-2\leq\frac{1}{x-1};\\ \frac{1}{x-1}=1\end{cases}\begin{cases} y\leq\frac{1}{x-1}+2\\ x=2\end{cases}.$

Точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, лежат на прямых: $y=3$ при $x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$ и $x=2$ при $y\in(-\infty;3)$.

Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$, $y=3$ и
$x=2$, $y\in(-\infty;3)$.

б) $\mathbf{\min\left\{y-2;\frac{1}{x-1}\right\}=1}$



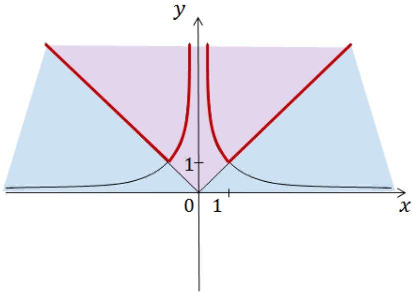
① $\begin{cases} y-2\leq\frac{1}{x-1};\\ y-2=1\end{cases}\begin{cases} y\leq\frac{1}{x-1}+2\\ y=3\end{cases}.$

② $\begin{cases} y-2\geq\frac{1}{x-1};\\ \frac{1}{x-1}=1\end{cases}\begin{cases} y\geq\frac{1}{x-1}+2\\ x=2\end{cases}.$

Ответ: $x\in(1;2], y=3$ и $x=2 y\in(3;+\infty)$.

1. Простроить графики функций:

а) $\boldsymbol{y = \max\{\frac{|x|}{x^2}; |x|\}}$

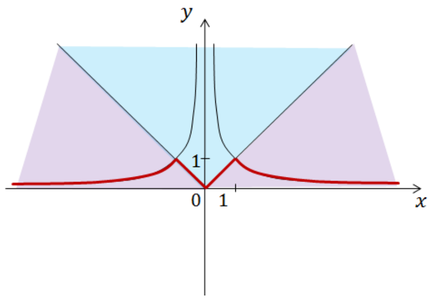


① $\begin{cases} \frac{|x|}{x^2} \leq |x| \\ y = |x| \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{|x|} \leq |x| \\ y = |x| \end{cases}.$

② $\begin{cases} \frac{|x|}{x^2} > |x| \\ y = \frac{|x|}{x^2} \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{|x|} > |x| \\ y = \frac{1}{|x|} \end{cases}.$

На рисунке график выделен и состоит из объединения частей гиперболы $y = \frac{1}{|x|}$ и частей лучей графика $y = |x|$, лежащих не ниже прямой y=1.

б) $\boldsymbol{f(x) = \min\{\frac{|x|}{x^2}; |x|\}}$



① $\begin{cases} \frac{|x|}{x^2} \leq |x| \\ y = \frac{|x|}{x^2} \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{|x|} \leq |x| \\ y = \frac{1}{|x|} \end{cases}.$

② $\begin{cases} \frac{|x|}{x^2} > |x| \\ y = |x| \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{|x|} > |x| \\ y = |x| \end{cases}.$

На рисунке график выделен и состоит из объединения частей гиперболы $y = \frac{1}{|x|}$ и частей лучей графика $y = |x|$, лежащих не выше прямой y=1.

4.**Найти** $\boldsymbol{\max(\min\left\{\frac{|x|}{x^2}; |x|\right\})}$

Решение: На основании ответа в задаче 3 б) получим, что наибольшее значение функции $f(x) = \min\{\frac{|x|}{x^2}; |x|\}$равно 1.

Ответ: 1

5.**Найдите все значения x>1 при каждом из которых наибольшее их двух чисел**

$\boldsymbol{a = log_2 x + 2log_x 32 - 2}$**и** $\boldsymbol{b = 41 - (log_2 x^2)^2}$ **больше , чем 5.**

Решение: Так как x>1, то $log_2 x > 0$.

1) Наибольшее из чисел аи b, больше, чем 5 тогда и только тогда, когда хотя бы одно из них больше , чем 5, т.е.

$\left[\begin{matrix} b > 5 \\ a > 5 \end{matrix}\right.(1)$

2) Решаем неравенство: $log_2 x + 2log_x 32 - 2 > 5 \Leftrightarrow \frac{(log_2 x^2)^2 - 7log_2 x + 10}{log_2 x} > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} log_2 x > 5 \\ log_2 x < 2 \end{matrix}\right.$ при условии $log_2 x > 0$*(2)*

3) Решаем неравенство: $41 - (log_2 x^2)^2 > 5 \Leftrightarrow log_2 x^2 < 6 \Leftrightarrow log_2 x<3$, при условии $log_2 x > 0$ (3)

4) Из (1), (2), (3) получаем $\left[\begin{matrix} log_2 x > 5 \\ log_2 x < 3 \end{matrix}\right.$ при условии $log_2 x > 0$, откуда $\left[\begin{matrix} x > 32 \\ 1 < x < 8 \end{matrix}\right.$.

Ответ: (1;8), (32;∞)

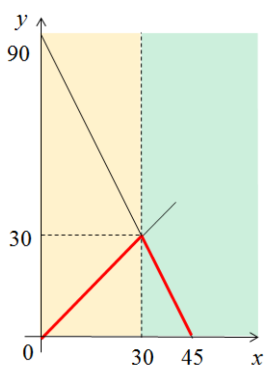
Основная (целевая) задача 2

Из всех прямоугольных треугольников найти тот, у которого наименьшая разность между величинми его углов будет наибольшей.
Решение

Обозначим величины острых углов прямоугольного треугольника буквами α и β, $\alpha + \beta = 90$.

Пусть $\alpha \leq \beta$.

Рассмотрим разности $\beta - \alpha$ и $90 - \beta$, $90 - \alpha$.



Поскольку $90 - \beta = \alpha$, а $90 - \alpha = \beta$ и $\alpha \leq \beta$, то наименьшими разностями будут $\beta - \alpha$ и $90 - \beta$. Значит, будем искать наибольшее значение из наименьших из этих разностей, т.е.

max (min ($\beta - \alpha, 90 - \beta$)).

Рассмотрим сначала$\min(\beta-\alpha, 90-\beta)$. $\alpha = 90-\beta$, $\beta-\alpha = 90-2\alpha$, тогда будем определять $\min(\alpha, 90-2\alpha)$.

Построим график функции $y = \min(x, 90-2x)$ при условии, что $x \geq 0\, , y \geq 0$.

① $\begin{cases} x \leq 90-2x \\ y = x \end{cases}$; $\begin{cases} x \leq 30 \\ y = x \end{cases}$.

② $\begin{cases} x \geq 90-2x \\ y = 90-2x \end{cases}$; $\begin{cases} x \geq 30 \\ y = 90-2x \end{cases}$.

Графиком этой функции является объединение двух отрезков.

Очевидно, максимум функции $y = \min(x, 90-2x)$достигается в точке $x = 30$, т.е. $\max(\min(\beta-\alpha, 90-\beta))$ достигается в случае, если $\alpha = 30$, а $\beta = 60$

Ответ:$30, 60$

При решении этой задачи и подготовительных к ней повторяются и включаются в новые связи свойства функций (линейной, дробно- линейной, функций, содержащих модули, логарифмической). В силу особенностей предложенных задач, содержащих новизну отношений между функциями, графиками, уравнениями, неравенствами, геометрическими объектами , расширяются системные связи между различными разделами школьного курса математики.

Задачи для самостоятельного решения:

Подготовительные задачи:

1.Постройте график: $f(x) = max\,\{\sin x\,; \cos x\}$ для x∈[0;π]

2. Решите уравнение $max\,\{\sin x\,; \cos x\}$=1,для x∈[0;$\pi$]

$(\frac{\pi}{2}; 0)$

3.Решите уравнение:$min\,\{\sin x\,; \cos x\}$=-1, для x∈[0;$\pi$]

(π)

4. Решите уравнение:$max\,\{x^4; 2-x^2\}$=2

$(\sqrt[4]{2}; -\sqrt[4]{2}; 0)$

Основная (целевая) задача

Из всех тупоугольных равнобедренных треугольников найти тот, у которого наименьшая разность между величинми его углов будет наибольшей. $(30, 30, 120)$

Предложенные задачи ориентированы на постепенное углубление и, по возможности, расширение знаний учащихся об основныхсвойствах функций. Задачи направлены на применение их внекоторой перестройке и ином подходе к ранее изученному материалу, присоединении к изученному материалу новых знаний, допускаемых программой, с целью его углубления.

Литература

1.Ушинский К. Д. Человек как предмет воспитания. Опыт педагогической антропологии/ К. Д. Ушинский – Москва: Фаир-Пресс, 2004;

2.Задания ЕГЭ, ЦТ,вступительных экзаменов в МФТИ.